

Colle du 24/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours.

1. Définir une fonction majorée, minorée, bornée. Caractériser par la valeur absolue le fait qu'une fonction soit bornée.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

1. Calculer le domaine de définition de f .
2. Simplifier f sur son domaine de définition.
3. Faire l'étude de f .
4. Montrer que le graphe de f admet un axe de symétrie.

Exercice 2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n+m) = f(n)f(m).$$

Colle du 24/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours.

1. Définir une fonction croissante et une fonction strictement décroissante.
2. Résoudre l'équation $(E) : x = \sqrt{3-2x}$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1)n$.
Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer la parité de f .
3. Poursuivre l'étude de f .

Colle du 24/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours.

1. Définir une fonction continue en a .
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Etudier $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x-2)}$.

Exercice 2. On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.